Théorème : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.
Alors Ω est connexe par lignes brisées.

Soit $x_0 \in \Omega$ et T_{x_0} l'ensemble des points de Ω que l'on peut relier à x_0 par ligne brisée dans Ω.

$T_{x_0} \neq \emptyset$: $x_0 \in T_{x_0}$

T_{x_0} est ouvert : Soit $x \in T_{x_0}$. Puisque $x \in \Omega$ ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$.
Or, $\forall y \in B(x,r)$, $[x,y] \subset B(x,r) \subset \Omega$ donc $y \in T_{x_0}$ et $B(x,r) \subset T_{x_0}$ i.e. T_{x_0} est ouvert.

T_{x_0} est fermé dans Ω : Soit $\boxed{x \in \overline{T_{x_0}} \cap \Omega}$ → pour montrer que $\overline{T_{x_0}} \cap \Omega \subset T_{x_0} \cap \Omega$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$ et $B(x,r) \cap T_{x_0} \neq \emptyset$.
Soit $y \in B(x,r) \cap T_{x_0}$. Alors $[x,y] \subset B(x,r) \subset \Omega$ et $[y,x_0] \subset \Omega$ d'où $[x,x_0] \subset \Omega$ et $x \in T_{x_0}$.

Puisque T_{x_0} est un ouvert fermé non vide de Ω connexe, $T_{x_0} = \Omega$ i.e. Ω est connexe par lignes brisées.

Corollaire : Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et f de classe C^1 sur Ω telle $df_x = 0$, $\forall x \in \Omega$.
Alors f est constante sur Ω.

Soit $a, b \in \Omega$ et $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ ligne brisée reliant a à b. Alors par l'inégalité des accroissements finis :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \|f(x_{i+1}) - f(x_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\sup_{c \in [x_i, x_{i+1}]} |||df_c|||}_{=0} \|x_{i+1} - x_i\| = 0.$$

D'où $f(a) = f(b)$.

Proposition : Soit $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni de sa structure euclidienne. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, df_x est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\|df_x(h)\| = \|h\|$).
Alors f est une isométrie affine (i.e. $f = u + \alpha$ avec $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isométrie et $\alpha \in \mathbb{R}^n$).

Étape 1 : • Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Puisque $|||df_z||| = 1$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$, par l'inégalité des accroissements finis : $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

• Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Puisque $df_a \in O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ et f est de classe C^1, par le théorème d'inversion locale, il existe V_a voisinage ouvert de a tq $f : V_a \to f(V_a)$ soit un C^1-difféomorphisme.
quitte à remplacer V_a par un ouvert U_a, $\boxed{\text{on peut supposer que } \underbrace{f(U_a)}_{=: W_a} \text{ est convexe}}$ → prendre $U_a = g(B)$ où B boule ouverte centrée en $f(a)$ et incluse dans $f(V_a)$, alors $g(B) = f^{-1}(B)$ est ouvert car f continue et $W_a = f(U_a) = f \circ g(B) = B$ est convexe. Notons $g : W_a \to U_a$ le difféo inverse.
Puisque $\forall x \in U_a$, $dg_{f(x)} = (df_x)^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, g est aussi une isométrie. Par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in U_a, \quad \|x - y\| = \|g \circ f(x) - g \circ f(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\|$$

$\Rightarrow \forall x, y \in U_a$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

Étape 2 : D'après 1), $\forall x, y \in U_a$, $\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle$. On différentie par rapport à x selon le vecteur $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle df_x(h), f(x) - f(y) \rangle + \langle f(x) - f(y), df_x(h) \rangle = \langle h, x - y \rangle + \langle x - y, h \rangle$$

(pour $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$, $d\varphi_{(x,y)}(h, l) = \langle x, l \rangle + \langle h, y \rangle$)

D'où, par symétrie du produit scalaire, $\langle df_x(h), f(x) - f(y) \rangle = \langle h, x - y \rangle$. On différentie par rapport à y selon le vecteur $l \in \mathbb{R}^n$:

$$-\langle df_x(h), df_y(l) \rangle = -\langle h, l \rangle \quad \text{i.e.} \quad \langle df_x(h), df_y(l) \rangle = \langle h, l \rangle.$$

D'où, $\forall x, y \in U_a$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\|df_x(h) - df_y(h)\|^2 = \underbrace{\|df_x(h)\|^2}_{=\|h\|^2} + \underbrace{\|df_y(h)\|^2}_{=\|h\|^2} - 2\underbrace{\langle df_x(h), df_y(h) \rangle}_{=\|h\|^2} = 0$ d'où $df_x = df_y$.

Étape 3 : Notons $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n ; df_x = df_0\}$.
- $\Gamma \neq \emptyset$ car $0 \in \Gamma$
- Γ est ouvert car $\forall a \in \Gamma$ et $\forall x \in U_a$, $df_x = df_a = df_0$.
- Γ est fermé car $\Gamma = df^{-1}(\{df_0\})$ et df est continue car f est de classe C^1.

Par connexité de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \mathbb{R}^n$.

Posons $u = df_0$ qui est une isométrie de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $x \mapsto f(x) - u(x)$ est de différentielle nulle sur $\mathbb{R}^n$ car $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
$df_x = df_0 = du_x$; → car u est linéaire donc $du_x = u$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
Cette fonction est donc constante égale à $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et donc $f(x) = u(x) + \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.